

Algorithmique des Graphes – TD 1

Exercice 1

Montrer que dans un graphe non orienté la somme des degrés des sommets est un nombre pair. En déduire que tout graphe a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice 2

Un graphe simple non orienté G a 15 arêtes, 3 sommets de degré 4, les autres étant de degré 3. Quel est le nombre de sommets du graphe ?

Exercice 3

Montrer que dans un graphe simple il y a au moins deux sommets de même degré.

Exercice 4

On définit un arbre comme étant un graphe non orienté connexe sans cycle.

1. Soit G un graphe non orienté connexe et sans cycle ayant au moins deux sommets. Montrer que G possède au moins deux sommets de degré 1.
2. Montrer que si G est un graphe connexe ayant n sommets et m arêtes avec $m > 0$ et $m = n - 1$ alors G possède au moins un sommet de degré 1.
3. Soit G un graphe ayant n sommets avec $n \geq 2$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (a) G est un arbre.
 - (b) G est sans cycle et admet m arêtes avec $m = n - 1$.
 - (c) G est connexe et admet m arêtes avec $m = n - 1$.
 - (d) G est sans cycle, et en ajoutant une arête on obtient un graphe ayant un cycle (et un seul).
 - (e) G est connexe, et si on supprime une arête quelconque le graphe obtenu n'est plus connexe.
 - (f) Tout couple de sommets est relié par une chaîne et une seule.

Exercice 5

Montrer que si G est connexe et $m = n$ alors G possède un unique cycle.

Exercice 6

Montrer que si dans un graphe complet ayant au moins six sommets les arêtes sont coloriées en deux couleurs (bleu et rouge) alors il existe forcément un triangle monochromatique.

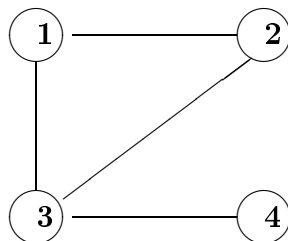
Pour travailler un peu entre deux séances de TD ...

Exercice 7

Est-il possible qu'un groupe de 9 personnes soit tel que chacun soit l'ami de 5 personnes exactement du groupe ?

Exercice 8

Donner tous les graphes partiels, tous les sous-graphes et tous les sous-graphes partiels du graphe suivant :



Exercice 9

Dessiner le graphe défini par la matrice d'adjacence :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$